

Einführung in die Mathematik - Matrizen (Teil 2) -

Karsten Brodmann

Oktober 2018

2 Rechenoperationen auf Matrizen

Für Matrizen sind verschiedene Rechenoperationen definiert. Wir betrachten sie im Folgenden.

2.1 Addition/Subtraktion von Matrizen

Zuerst sehen wir uns die Addition von Matrizen an. Hierzu bemühen wir ein Beispiel aus der betriebswirtschaftlichen Praxis.

Ein Unternehmen produziert die Güter G1, G2 und G3. Es werden die Händler H1, H2, H3 und H4 beliefert. Wir betrachten die Lieferungen der beiden Halbjahre eines bestimmten Jahres.

	1. Halbjahr					2. Halbjahr			
	H1	H2	H3	H4		H1	H2	H3	H4
G1	20	16	8	10	G1	20	14	9	11
G2	5	10	11	8	G2	7	11	12	8
G3	12	6	9	11	G3	10	9	8	13

Will man nun die Gesamtmenge der an einen Händler gelieferten Güter ermitteln, addiert man die jeweils korrespondierenden Elemente der beiden Tabellen. Damit das funktioniert, müssen die Tabellen hinsichtlich ihrer Zeilen- und Spaltenanzahl gleich sein.

Die Addition, die Ermittlung der Jahresliefermengen der verschiedenen Güter an die Händler, gestaltet sich wie folgt:

	H1	H2	H3	H4
G1	$20 + 20 = 40$	$16 + 14 = 30$	$8 + 9 = 17$	$10 + 11 = 21$
G2	$5 + 7 = 12$	$10 + 11 = 21$	$11 + 12 = 23$	$8 + 8 = 16$
G3	$12 + 10 = 22$	$6 + 9 = 15$	$9 + 8 = 17$	$11 + 13 = 24$

Als Regel halten wir fest:

Regel 2.1. Zwei Matrizen gleicher Ordnung $\mathbf{A} = (a_{ij})$ und $\mathbf{B} = (b_{ij})$ werden addiert oder subtrahiert, indem man die in den Matrizen an gleicher Stelle stehenden Elemente addiert beziehungsweise subtrahiert: $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$ und $(a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$.

Die Addition beziehungsweise Subtraktion ist nur möglich, wenn die beiden beteiligten Matrizen die gleiche Ordnung besitzen, also jeweils die gleiche Anzahl Zeilen und Spalten besitzen.

Wenn \mathbf{A} eine beliebige Matrix ist und $\mathbf{0}$ eine Nullmatrix gleicher Ordnung, dann ist $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ und $\mathbf{A} - \mathbf{0} = \mathbf{A}$.

Regel 2.2. Für die Matrizenaddition gelten:

Kommutativgesetz: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

Assoziativgesetz: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

Monotoniegesetze:

$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \pm \mathbf{C} = \mathbf{B} \pm \mathbf{C}$ und

$\mathbf{A} \leq \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \pm \mathbf{C} \leq \mathbf{B} \pm \mathbf{C}$

Die Subtraktion von Matrizen ist freilich nicht kommutativ.

2.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Wir greifen eines der einführenden Beispiele aus Teil 1 dieser Serie auf, das Warenhaus mit den 4 Lägern und 7 Filialen. Dort hatten wir eine Tabelle aufgestellt, die die Kosten für eine Tonne transportierter Ware von den Lagerhäusern zu den Filialen darstellte, die innerhalb einer betrachteten Periode angefallen sind. Diese Tabelle soll uns wiederum als Beispiel dienen. Die Filialen sind mit F1...F7 gekennzeichnet, die Läger mit A bis D.

Lagerhaus	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
A	14	10	3	1	1	6	16
B	5	11	7	8	10	6	13
C	2	6	5	12	4	3	3
D	1	10	15	5	11	7	5

Nehmen wir nun an, die Kosten seien in US-Dollar ausgewiesen und wir wollen Sie in Euro umrechnen. Ein Dollar entspreche 0,87 Euro. Dann müssen wir jeden Wert in der Tabelle mit 0,87 multiplizieren, um den jeweiligen Wert in Euro zu berechnen.

Weil sich die Tabelle, wie wir bereits wissen, als Matrix abbilden lässt, lässt sich eine Matrix auch mit einer reellen Zahl, einem Skalar, multiplizieren. Die dafür geltende Regel spiegelt das Vorgehen wider, welches wir auf die Tabelle anwenden, wenn wir die entsprechende Berechnung vornehmen wollten.

Regel 2.3. Eine Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ wird mit einer reellen Zahl c , einem Skalar, multipliziert, indem jedes Element der Matrix mit dieser Zahl multipliziert wird: $c(a_{ij}) = (ca_{ij})$.

Regel 2.4. Für die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar gelten:

Kommutativgesetz: $cA = Ac$

Assoziativgesetz: $(c \cdot d)A = c(dA)$

Distributivgesetze:

$$c(A + B) = cA + cB \text{ und} \\ (c + d)A = cA + dA$$

Monotoniegesetze:

$$A = B \Rightarrow cA = cB, \\ A \leq B \Rightarrow cA \leq cB, \text{ falls } c \geq 0 \text{ und} \\ A \leq B \Rightarrow cA \geq cB, \text{ falls } c \leq 0$$

2.3 Skalares Produkt von Vektoren

An dieser Stelle darf man sich durch die Begrifflichkeiten nicht verwirren lassen. Es geht darum, zwei Vektoren miteinander zu multiplizieren. Wir sprechen von einem skalaren Produkt, weil das Ergebnis ein Skalar ist.

Betrachten wir hierzu vorerst wieder ein Beispiel. Ein Fahrradhändler hat in einer Woche $x_1 = 5$ Fahrräder vom Typ A, $x_2 = 6$ Fahrräder vom Typ B und $x_3 = 3$ Fahrräder vom Typ C verkauft. Die getätigten Verkäufe lassen sich als Zeilenvektor notieren: $\mathbf{x}' = (5, 6, 3)$. Die Verkaufspreise in Euro mögen $p_1 = 400$ (Typ A), $p_2 = 800$ (Typ B) und $p_3 = 1100$ (Typ C) betragen. Wir schreiben sie als Spaltenvektor.

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 400 \\ 800 \\ 1100 \end{pmatrix}$$

Der Wochenumsatz errechnet sich nun aus dem Produkt des Zeilenvektors \mathbf{x}' und dem Spaltenvektor \mathbf{p} . Dazu multiplizieren wir jedes x_i mit dem zugehörigen p_i und summieren die einzelnen Produkte. - Ganz wie im realen Leben.

$$\mathbf{x}'\mathbf{p} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 5 \cdot 400 + 6 \cdot 800 + 3 \cdot 1100 = 10100$$

Achtung: Es ist Konvention, das skalare Produkt zweier Vektoren als „Zeilenvektor mal Spaltenvektor“ zu schreiben.

Multipliziert man dagegen einen Spaltenvektor mit einem Zeilenvektor ist das Ergebnis eine Matrix! - Wir werden das im nächsten Abschnitt betrachten.

Die Rechenregel ist sehr einfach. Weil aber die Reihenfolge der Operanden bei dieser Multiplikation extrem wichtig ist, halten wir das Ganze als Regel fest:

Regel 2.5. Gegeben seien ein Zeilenvektor $\mathbf{a}' = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ und ein Spaltenvektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Beide haben die gleiche Ordnung n . Das skalare oder auch innere Produkt der beiden Vektoren ist der Skalar

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \sum_{i=1}^n a_ib_i$$

Haben alle Elemente eines Vektors den Wert 1, nennen wir ihn auch *summierenden Vektor*. In einem solchen Fall ist das skalare Produkt lediglich die Summe der Elemente des anderen Vektors.

Beispiel:

$$(1, 2, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$(1, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 + 2 + 3 = 6$$

Regel 2.6. Für das skalare Produkt zweier Vektoren gelten:

Kommutativgesetz: $\mathbf{a}'\mathbf{b} = \mathbf{b}'\mathbf{a}$

Distributivgesetz: $(\mathbf{a}' + \mathbf{b}')\mathbf{c} = \mathbf{a}'\mathbf{c} + \mathbf{b}'\mathbf{c}$

Monotoniegesetze:

$\mathbf{a}' = \mathbf{b}' \Rightarrow \mathbf{a}'\mathbf{c} = \mathbf{b}'\mathbf{c}$, \mathbf{c} beliebig,

$\mathbf{a}' \leq \mathbf{b}' \Rightarrow \mathbf{a}'\mathbf{c} \leq \mathbf{b}'\mathbf{c}$, für $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ und

$\mathbf{a}' \leq \mathbf{b}' \Rightarrow \mathbf{a}'\mathbf{c} \geq \mathbf{b}'\mathbf{c}$, für $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$