Einführung in die Mathematik
- Matrizen (Teil 1) -

Karsten Brodmann

September 2018

1 Grundbegriffe der Matrizenrechnung

1.1 Matrizen und Vektoren

Eine Funktion ordnet einer (oder auch mehreren) unabhängigen Variablen eindeutig einen Wert der abhängigen Variablen zu. In der Wissenschaft nutzt man dies, um Zusammenhänge zwischen verschiedenen Größen mittels Funktionen zu beschreiben. In der Betriebswirtschaftslehre hat man es beispielsweise mit Zusammenhängen und/oder Beziehungen zu tun, die oftmals durch Graphen oder Tabellen beschrieben werden. Im Folgenden stelle ich einige Beispiele vor.

Entfernungen zwischen Ortschaften können als gerichteter Graph dargestellt werden. Die Ortschaften sind vereinfacht als Buchstaben des Alphabets dargestellt.

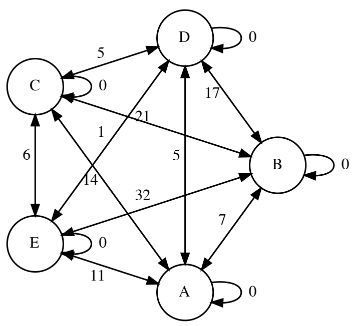

Abbildung 1: Gerichteter Graph von Entfernungen zwischen Orten

Die Ortschaften sind als entsprechend bezeichnete Knoten dargestellt. Die Kanten zwischen den Knoten stellen die Wegstrecken dar. Der an ihnen notierte Wert gibt die Entfernung an. Weil die Entfernung für Hin- und Rückweg identisch ist, besitzt jede Kante zwei Pfeilspitzen, die die jeweilige Richtung angibt, in welcher die Entfernung angegeben ist. Hier sind die

Entfernungen für beide Richtungen gleich. Andernfalls würden zwei separate Kanten gezeichnet.

Eine andere Darstellung desselben Sachverhalts, als Tabelle, kann wie folgt aussehen. Solche Tabellen finden sich in handelsüblichen Autoatlanten.

von/nach	A	B	C	D	E
A	0	7	14	5	11
B	7	0	21	17	32
C	14	21	0	5	6
D	5	17	5	0	1
E	11	32	6	1	0

Ein Warenhaus besitzt 4 Läger und 7 Filialen. Die Kosten für eine Tonne transportierter Ware von den Lagerhäusern zu den Filialen, die innerhalb einer betrachteten Periode angefallen sind, lassen sich als Tabelle darstellen. Die Filialen sind mit F1…F7 gekennzeichnet, die Läger mit A bis D.

Lagerhaus	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
A	14	10	3	1	1	6	16
B	5	11	7	8	10	6	13
C	2	6	5	12	4	3	3
D	1	10	15	5	11	7	5

Nimmt man nun aus einer solchen Tabelle lediglich die Zahlen und setzt sie in Klammern, so erhalten wir eine so genannte *Matrix*.

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 3 & 1 & 1 & 6 & 16 \\ 5 & 11 & 7 & 8 & 10 & 6 & 13 \\ 2 & 6 & 5 & 12 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 10 & 15 & 5 & 11 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Definition 1.1. *Ein rechteckiges Zahlenschema der Form*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt Matrix *mit m Zeilen und n Spalten oder auch $m \times n$-Matrix*

Den ersten Index (Zeilenindex) der Elemente bezeichnet man üblicherweise mit der Laufvariablen i, den zweiten (Spaltenindex) mit j. m und n bezeichnen die so genannte *Ordnung der Matrix*. Matrizen werden gerne mit großen, halbfetten Buchstaben bezeichnet. Alternativ verwendet man auch normale Kleinbuchstaben mit Indizes in Klammern geschrieben: $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$.

Definition 1.2. *Eine Matrix, die aus nur einer Spalte besteht, heißt* Spaltenvektor*:*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Eine Matrix, die aus nur einer Zeile besteht, heißt Zeilenvektor*:* $(a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_n)$.

In der Symbolschreibweise werden Spaltenvektoren gerne mit kleinen, halbfetten Buchstaben ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ...) bezeichnet. Der j-te Spaltenvektor $\boldsymbol{a}$ einer Matrix wird dann mit $\boldsymbol{a_j}$ notiert.

Analoges gilt für Zeilenvektoren. Um ihre Zeileneigenschaft anzuzeigen, verwendet man üblicherweise einen Hochstrich oder ein hochgestelltes T: $\boldsymbol{a'}$ oder $\boldsymbol{a^T}$. Der Index wird gemäß Konvention mit i betitelt: Der i-te Zeilenvektor $\boldsymbol{a}$ ist demzufolge $\boldsymbol{a_i'}$ oder $\boldsymbol{a_i^T}$.

Während wir bei einer Matrix von ihren *Elementen* sprechen, heißen diese bei Vektoren *Komponenten.*

Einen Sonderfall stellt die 1×1-Matrix dar. Sie besitzt nur ein einziges Element. Wir nennen das auch einen *Skalar*.

Betrachten wir ein typisches Beispiel der Input-Output-Analyse aus der Volkswirtschaftslehre. Dabei sollen in einer Volkswirtschaft drei Industriezweige existieren. In jedem Industriezweig werden eigene Produkte sowie auch Produkte aus den jeweils anderen Industriezweigen verarbeitet. Alle Produkte, die nicht als Input für die Produktion verwendet werden, gehen an die Endnachfrager. Die Beziehungen lassen sich tabellarisch wie folgt darstellen:

Industriezweig	A	B	C	Endnachfrage	Gesamtoutput
A	1	3	1	4	9
B	4	1	1	5	11
C	1	3	2	2	8

In Matrix- beziehungsweise Vektorschreibweise sieht das dann so aus:

$$\begin{array}{cc} \text{Ind.-Zweige} \mid \text{Endnachfrage} & \text{Gesamtoutput} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & & 4 \\ 4 & 1 & 1 & & 5 \\ 1 & 3 & 2 & & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Komponenten des Spaltenvektors des Gesamtoutputs sind die Summen der jeweils zugehörigen Zeilenvektoren, welche die Inputmengen sowie die Endnachfragen je Industriezweig angeben. So produziert der Industrie zwei A insgesamt 9 Einheiten des von ihm produzierten Gutes. Davon geht eine Einheit wieder in die eigene Produktion ein, die Industriezweige B und C verbrauchen drei und eine Einheit. Vier Produktionseinheiten stehen den Endnachfragern zur Verfügung.

1.2 Weitere Begriffe und Zusammenhänge zu Matrizen und Vektoren

Im Folgenden wollen wir die wichtigsten Begriffe und Zusammenhänge in Verbindung mit Matrizen und Vektoren besprechen. Soweit keine speziellen Defintionen angegeben werden, gelten die gegebenen immer auch für Vektoren als Sonderfälle von Matrizen.

Definition 1.3. *Zwei $m \times n$-Matrizen $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ und $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ sind* gleich*, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, wenn $a_{ij} = b_{ij}$ für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ gilt.*

Das heißt, es können nur Matrizen der gleichen Ordnung zueinander gleich sein!

Definition 1.4. *Gegeben seien zwei $m \times n$-Matrizen $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ und $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$.*

Gilt $a_{ij} < b_{ij}$ für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$, also für alle Elemente der Matrizen, so schreiben wir $\boldsymbol{A} < \boldsymbol{B}$. Gilt $a_{ij} \leqq b_{ij}$ für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$, also für alle Elemente der Matrizen, so schreiben wir $\boldsymbol{A} \leqq \boldsymbol{B}$.

Auf diese Weise sind *Ungleichungen* für Matrizen definiert.

Eine Spitzfindigkeit der Notation soll nicht verschwiegen werden, die zumindest einige Autoren vornehmen. Gilt bei $\boldsymbol{A} \leqq \boldsymbol{B}$ für mindestens ein Elementepaar $a_{ij} < b_{ij}$ (echt kleiner), dann wird dies auch mit $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$ notiert. An diese Konvention halten sich jedoch nicht alle Autoren.

Definition 1.5. *Eine Matrix, bei der sämtliche Elemente den Wert Null haben, heißt* Nullmatrix*. Sie wird auch mit $\mathbf{0}$ bezeichnet. Ein Vektor mit ausschließlich Nullwerten heißt* Nullvektor*.*

Definition 1.6. *Eine $n \times n$-Matrix, bei der Zeilen- und Spaltenanzahl identisch sind, heißt* quadratische Matrix n-ter Ordnung*.*

Bei einer quadratischen Matrix bilden die Elemente $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ die *Hauptdiagonale*. Die Elemente a_{ij} mit $i + j = n + 1$ bilden die *Nebendiagonale*, also die Diagonale von links unten nach rechts oben.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \boldsymbol{a_{14}} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} & a_{34} \\ \boldsymbol{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & \boldsymbol{a_{44}} \end{pmatrix}$$

Definition 1.7. *Eine quadratische Matrix n-ter Ordnung heißt* Diagonalmatrix n-ter Ordnung*, wenn alle Elemente, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegen, gleich Null sind.*

Definition 1.8. *Eine Diagonalmatrix n-ter Ordnung heißt* skalare Matrix*, wenn alle Elemente auf der Hauptdiagonalen liegen den gleichen Wert besitzen.*

Definition 1.9. *Eine Diagonalmatrix n-ter Ordnung heißt* Einheitsmatrix n-ter Ordnung*, wenn alle Elemente auf der Hauptdiagonalen liegen den Wert 1 besitzen. Abkürzend wird eine solche Matrix mit $\boldsymbol{E}$ notiert.*

Hier je ein konkretes Beispiel für eine Diagonal- und eine Einheitsmatrix 6-ter Ordnung.

$$\begin{array}{cc} \text{Diagonalmatrix} & \text{Einheitsmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Definition 1.10. *Ein Vektor, dessen i-te Komponente 1 ist und der ansonsten nur 0-Werte aufweist, heißt* i-ter Einheitsvektor. *Wir notieren ihn mit e_i.*

Definition 1.11. *Eine quadratische Matrix, bei der sämtliche Elemente ober- oder unterhalb der Hauptdiagonalen den Wert 0 haben, heißt* Dreiecksmatrix.

Wir unterscheiden bei den Dreiecksmatrizen nach oberen und unteren Dreiecksmatrizen. Hier je ein Beispiel für entsprechende Matrizen 6-ter Ordnung:

$$\begin{array}{cc} \text{Obere Dreiecksmatrix} & \text{Untere Dreiecksmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \end{array}$$

Definition 1.12. *Sei $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix. Die $n \times m$-Matrix $\boldsymbol{B} = (b_{ji})$ mit $b_{ji} = a_{ij}$ für $j = 1 \dots n$ und $i = 1 \dots m$ heißt* transponierte Matrix *zu $\boldsymbol{A}$ oder auch einfach* Transponierte *zu $\boldsymbol{A}$. Sie wird mit $\boldsymbol{A}'$ oder $\boldsymbol{A}^T$ notiert.*

Hier ein Beispiel:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Die erste Zeile der Matrix $\boldsymbol{A}$ wird also zur ersten Spalte ihrer Transponierten $\boldsymbol{A}'$ und so fort. Umgekehrt kann man natürlich auch sagen, die erste Spalte der Matrix $\boldsymbol{A}$ wird zur ersten Zeile ihrer Transponierten $\boldsymbol{A}'$ und so weiter.

Definition 1.13. *Gilt für eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$, dann heißt die Matrix* symmetrisch.

Auf den Hinweis, es müsse sich um eine quadratische Amtrix handeln, hätte man in der Definition verzichten können. Die Gleichheit von $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$ ist ausschließlich bei quadratischen Matrizen möglich. Das heißt: Eine symmetrische Matrix ist auch immer eine quadratische Matrix.

Definition 1.14. *Eine Matrix* $\boldsymbol{A}^*$*, die durch Streichen von Zeilen und/oder Spalten aus einer Matrix* $\boldsymbol{A}$ *resultiert, heißt* Teilmatrix *von* $\boldsymbol{A}$*.*

Zur besseren Unterscheidung werden verschiedene Teilmatrizen mit einem Index versehen. Der hat jedoch nichts mit den gestrichenen Zeilen oder Spalten zu tun. Sehen wir uns ein konkretes Beispiel an.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}_1^* = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}_2^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Bei $\boldsymbol{A}_1^*$ wurde die dritte Zeile von $\boldsymbol{A}$ gestrichen. Bei $\boldsymbol{A}_2^*$ wurden die dritte Zeile und die erste Spalte von $\boldsymbol{A}$ gestrichen. Beide sind Teilmatrizen $\boldsymbol{A}$.